數學
延伸部分 單元二
代數與微積分
練習卷

2012 年 2 月

香港考試及評核局
Hong Kong
Examinations and
Assessment Authority

內容簡介

- 考試形式
- 題目介紹
- 評卷參考
- 學生表現
- 答卷示例
- 一般建議

考試形式

- 考試時間：**2**小時**30**分鐘
- 本單元只考一卷
- 全卷分爲兩部，全部題目均須作答
- 學生須具有必修部分及初中課程基礎部分及非基礎部分的知識

題目介紹 - 題 2

考慮下列 x，y，z 的線性方程組

$$\begin{cases} x-7y+7z=0 \\ x-ky+3z=0 \\ 2x+y+kz=0 \end{cases}$$

，其中 k 爲實數。

若上述方程組有非平凡解，求 k 的兩個可取值。

- 齊次三元線性方程組的非平凡解的理解
- 這是此課題中較簡單直接的題型

題目介紹 - 題 5

(a) 已知對任意實數 x，$\cos(x+1)+\cos(x-1)=k\cos x$ 。
求 k 的值。

(b) 不用計算機，求 $\begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 \\ \cos 4 & \cos 5 & \cos 6 \\ \cos 7 & \cos 8 & \cos 9 \end{vmatrix}$ 的值。

- 此題要求學生應用三角函數的和積互化公式及行列式的基本性質

題目介紹 - 題 8

(a) 利用代換積分法，求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$。

(b) 利用分部積分法，求 $\int \ln x \,\mathrm{d}x$。

- 應用代換法及分部積分法求不定積分
- 此題所示的積分是常見的類型

題目介紹 - 題 10

(a) 求 $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 。

(b) 圖 1 所示陰影部分由曲線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 及 $y=e^{-x^2}$ 圍成，其中 $1\le x\le 2$ 。現把該陰影部分繞 **y** 軸旋轉，得一旋轉體，求該旋轉體的體積。

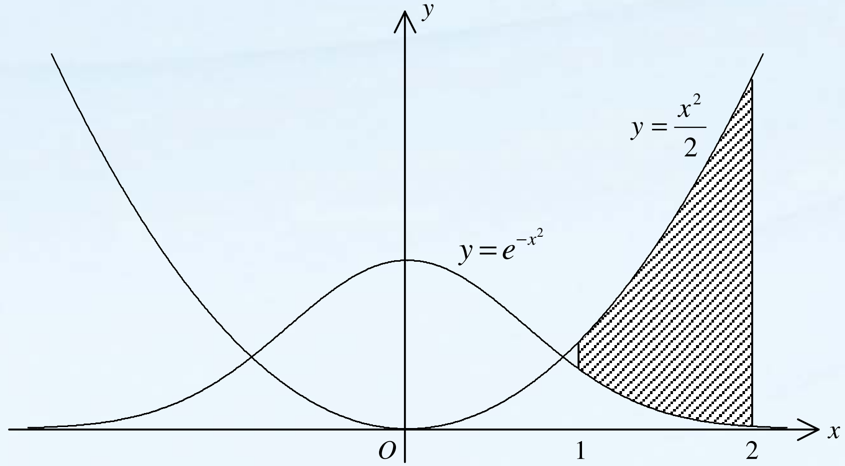


圖 1

- 定積分及外殼法的應用，所示積分較爲複雜

題目介紹 -題 12

設 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{i}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{j}$ 和 $\overrightarrow{OC}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ （見圖 2）。設 M 和 N 分別爲直線 AB 和 OC 上的點，使得 $AM:MB=a:(1-a)$ 和 $ON:NC=b:(1-b)$ 其中 $0<a<1$ 和 $0<b<1$ 。假設 MN 同時垂直於 AB 和 OC。

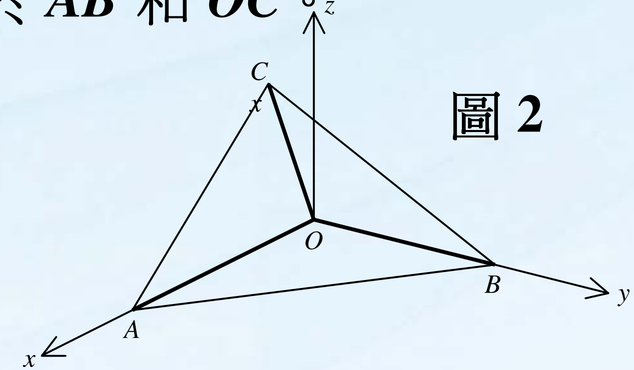


圖 2

(a) (i) 證明 $\overrightarrow{MN}=(a+b-1)\mathbf{i}+(b-a)\mathbf{j}+b\mathbf{k}$ 。

(ii) 求 a 和 b 的值。

(iii) 求直線 AB 與 OC 之間的最短距離。

(b) (i) 求 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 。

(ii) 設 G 爲 O 點在平面 ABC 上的投影，求直線 OG 與 MN 的交點的坐標。

- 三維向量題，不包括在附加數學或純粹數學內

題目介紹 - 題 13

(a) 設 $f(x)$ 於 $-p \le x \le p$ 爲奇函數，其中 p 爲正常數。

證明 $\int_0^{2p} f(x-p)\,dx = 0$。由此計算 $\int_0^{2p} [f(x-p)+q]\,dx$，

其中 q 爲常數。

(b) 證明 $\dfrac{\sqrt{3}+\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1+\sqrt{3}\tan x}{2}$。

(c) 利用(a)及(b)，或其他方法，計算 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x)\,dx$。

- 應用函數性質以證明及計算積分

評卷參考 - 題 2

1M : 給利用行列式等於零

1A : 給寫出正確的行列式

1M : 給能展開所寫出的行列式

1A : 給正確答案

評卷參考 - 題 5

(a)

1M：給利用餘弦的和化積或複角公式

1A ：給 k 的正確答案

(b)

1M：給列（或行）的運算

1A ：給利用(a)或餘弦的和化積公式

1M：給利用行列式性質因式分解行列式

1A ：給正確答案

評卷參考 - 題 13

(a)

1M : 給利用代換法

1A : 給代換後正確的積分

1 : 給正確完成證題

1A : 給正確答案

(b)

1M : 給利用正切的複角公式

1 : 給正確完成證明

評卷參考 - 題 13

(c)

1M : 給變換被積函數

1M : 給證明奇函數

1A : 給正確結論

1A : 給正確答案

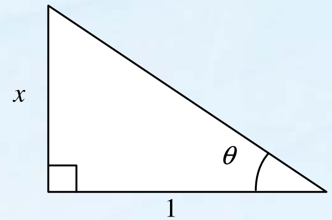
學生表現 - 題 1、2

- 整體表現良好
- 在題 1， 部分學生誤將通項寫爲 $C_r^9 2^{9-r} x^r$
- 在題 2， 部分學生以高斯消去法解題，但未能完成

學生表現 - 題 4

- 整體表現良好
- 部分學生只考慮 x 為正數的情況，

即 $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



- 很多學生於設 $x = \tan\theta$ 時，未有考慮其取值範圍

學生表現 - 題 5

- 在(a)，部分學生誤將 cos1當作cos1°處理
- 在(b)，很多學生先將行列式展開，但均未能得出正確答案

學生表現 - 題 9

- 常犯錯誤不在微分步驟，而在化簡過程
- 本題所設曲線爲二次圓錐曲線，亦有部分學生以切線與曲線相交於兩相同點解之

學生表現 - 題 11

- 整體表現良好
- 很多學生能掌握矩陣的運算
- 在 (c)，不少學生未有證明 $XY = YX = 0$，便應用等式 $A^n = X^n + Y^n$

學生表現 - 題 12

- 整體表現良好
- 在(a)及(b)(i) ，很多學生能掌握三維向量加法和乘法的運算
- 在 (b)(ii) ，很多學生未能掌握以向量方法解兩直線的交點

學生表現 - 題 13、14

- 此兩題乃附加數學及純粹數學常見的積分題型
- 在各題(a) ，很多學生頗能掌握微積分基本技巧，惟學生在化簡及運算上常犯錯誤，以致未能完成題目最後的部分

答卷示例 – 表現良好

題 10

Start each question on

a) $\int x e^{-x^2} dx$

$= \frac{1}{2}\int e^{-x^2} d(x^2)$ 1M

$= -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} d(-x^2)$

$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ where C is a constant ✓ 1A

b) The volume of revolution

$= \int_1^2 2\pi x\left(\frac{x^2}{2}\right)dx - \int_1^2 2\pi x\left(e^{-x^2}\right)dx$ ✓ 1M+1A

$= \int_1^2 \pi x^3 dx - \int_1^2 2\pi x e^{-x^2} dx$

$= \frac{\pi x^4}{4}\Big|_1^2 + \pi e^{-x^2}\Big|_1^2$ ✓ 1M

$= \left(\frac{2^4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\pi e^{-4} - \pi e^{-1}\right)$

$= 4\pi - \frac{\pi}{4} + \pi\left(\frac{1}{e^4} - \frac{1}{e}\right)$

$= \frac{15\pi}{16} + \pi\left(\frac{1-e^3}{e^4}\right)$

$= \left(\frac{15}{16} + \frac{1-e^3}{e^4}\right)\pi$ ✗

答卷示例 – 表現良好

題 13

a. $-f(x) = f(-x)$ ← For odd function,

$\int_0^{2p} f(x-p)\,dx$ (Let $u = x-p$, $du = dx$. When $x = 2p$, $u = p$; When $x = 0$, $u = -p$.) 1M

$= \int_{-p}^{p} f(u)\,du$

$= \int_0^p f(u)\,du + \int_{-p}^{0} f(u)\,du$

$= \int_0^p f(x)\,dx + \int_{-p}^{0} f(x)\,dx$

$= \int_0^p f(x)\,dx - \int_{-p}^{0} f(-x)\,dx$ (Let $t = -x$, $dt = -dx$) 1M

$= \int_0^p f(x)\,dx + \int_p^0 f(t)\,dt$ (When $x = 0$, $t = 0$; When $x = -p$, $t = p$.)

$= \int_0^p f(x)\,dx - \int_0^p f(t)\,dt$

$= \int_0^p f(x)\,dx - \int_0^p f(x)\,dx$ ✓ 1

$= 0$ //

$\int_0^{2p} [f(x-p) + q]\,dx$

$= \cancel{\int_0^{2p} f(x-p)\,dx} + \int_0^{2p} q\,dx$

$= qx\Big|_0^{2p}$

$= 2pq$ // ✓ 1A

b. $\dfrac{\sqrt{3} + \tan(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - \tan(x-\frac{\pi}{6})} = \dfrac{\sqrt{3} + \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3} - \frac{\tan x - \tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{6}}}$ 1M

$= \dfrac{\sqrt{3}(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan x) + \tan x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan x) - \tan x + \frac{\sqrt{3}}{3}}$

$= \dfrac{\sqrt{3} + \tan x + \tan x - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3} + \tan x - \tan x + \frac{\sqrt{3}}{3}}$

$= \dfrac{2\tan x + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}$

$= \dfrac{6\tan x + 3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}$

$= \dfrac{6\tan x + 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$

$= \dfrac{3\tan x + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}\tan x + 1}{2}$ // ✓ 1

c. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{2} \times 2\right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{2}\right) + \ln 2\right] dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln\left[\frac{\sqrt{3}+\tan(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-\tan(x-\frac{\pi}{6})}\right] + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln 2\,dx$ 1M

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sqrt{3}+\tan(x-\frac{\pi}{6}))\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(\sqrt{3}-\tan(x-\frac{\pi}{6}))\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln 2\,dx$

$= \int_0^{2(\frac{\pi}{6})} \ln[\sqrt{3}+\tan(x-\frac{\pi}{6})]\,dx - \int_0^{2(\frac{\pi}{6})} \ln(\sqrt{3}-\tan(x-\frac{\pi}{6}))\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln 2\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln 2\,dx$? ? ✓

$= \ln 2\, x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{\pi}{3}\ln 2$ // ✓ 1A

答卷示例 – 表現中等

題 5

5.(a) $\cos(x+1)+\cos(x-1)=k\cos x$

$$2\cos\frac{(x+1)+(x-1)}{2}\cos\frac{(x+1)-(x-1)}{2}=k\cos x \quad ✓ \quad 1M$$

$$2\cos\frac{2x}{2}\cos\frac{2}{2}=k\cos x$$

$$2\cos x\cos(1)=k\cos x$$

$$2\cos(1)=k \quad ✓ \quad 1A$$

$$k=2.000 \quad ✗$$

(b)

$$\begin{vmatrix}\cos 1 & \cos 2 & \cos 3\\ \cos 4 & \cos 5 & \cos 6\\ \cos 7 & \cos 8 & \cos 9\end{vmatrix} = \cos 1(\cos 5\cos 9-\cos 6\cos 8) - \cos 2(\cos 4\cos 9-\cos 6\cos 7) + \cos 3(\cos 4\cos 8-\cos 5\cos 7)$$

$$=\frac{\cos 1}{2}\left[(\cos 14+\cos 4)-(\cos 14+\cos 2)\right] \quad 1M$$

$$-\frac{\cos 2}{2}\left[(\cos 13+\cos 5)-(\cos 13+\cos 1)\right]$$

$$+\frac{\cos 3}{2}\left[(\cos 12+\cos 4)-(\cos 12+\cos 2)\right]$$

$$=\frac{\cos 1}{2}(\cos 4-\cos 2)-\frac{\cos 2}{2}(\cos 5-\cos 1)+\frac{\cos 3}{2}(\cos 4-\cos 2) \quad ✗$$

$$=\frac{(\cos 4-\cos 2)(\cos 1+\cos 3)}{2}$$

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

答卷示例 – 表現中等

題 12

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$

$= (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})b - \dfrac{(1-a)(\vec{i})+(a)\vec{j}}{1-a+a}$ 1M

$= b\vec{i} + b\vec{j} + b\vec{k} - (1-a)\vec{i} - a\vec{j}$

$= (a+b-1)\vec{i} + (b-a)\vec{j} + b\vec{k}$ ✓ 1

(ii) $\because \overrightarrow{MN} \perp$ to both $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ and $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ 1M+1M

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{j} - \vec{i}$

$[(a+b-1)\vec{i} + (b-a)\vec{j} + b\vec{k}] \cdot [\vec{j} - \vec{i}] = 0$ — ①

$[(a+b-1)\vec{i} + (b-a)\vec{j} + b\vec{k}] \cdot [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}] = 0$

① : $1-a-\cancel{b}+\cancel{b}-a = 0$

$-2a = -1$

$a = \frac{1}{2}$ ✓ 1A

② $a+b-1+b-a+b = 0$

$3b-1 = 0$

$b = \frac{1}{3}$ ✓ 1A

(iii) The distance is $\overrightarrow{OM}$

$\left|(1-\frac{1}{2})\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right|$

$= \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}$

$= 5$ ✗

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{j} + \vec{k}$

b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$= (-\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{j} + \vec{k})$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ✓ 1A

寫於邊界以外的答案，將不予評閱。

答卷示例 – 表現稍遜

題 3

3. 設命題為P(n).

当 $n = 1$ 时

$4^{(1)} + 15(1) - 1 = 18$ (它能整除9)

∴ P(1) 為真

即 $4^{k} + 15(k) - 1 = 9M$ (M為正整數)

假設 P(k) 為真。

$4^{k} + 15(k) - 1 = 9M$

当 $n = k+1$ 时，

$4^{k+1} + 15(k+1) - 1$

$= 4^{k} + 4 + 15k + 15 - 1 - 1 + 1$

$= 4^{k} + 15k + 4 + 15 - 1 - 1 + 1$

$= 4^{k} + 15k - 1 + 4 + 15 - 1 + 1$

$= 9M + 18 + 9 \times \frac{1}{9}$

$= 9(M+2) + 9 \times \frac{1}{9}$

$= 9(M + 2 + \frac{1}{9})$

$= 9(M + \frac{19}{9})$ (它能整除9)

∴ P(2) 為真

∴ 利用數學归纳法 P(n) 為真，对于所有正整數 n，$4^{n} + 15n - 1$ 可被9整除。

答卷示例 – 表現稍遜

題 1

1. $(2-x)^9$

$= [C^9_0 2^9 + C^9_1 2^8 x + C^9_2 2^7 x^2 + C^9_3 2^6 x^3 + C^9_4 2^5 x^4 + C^9_5 2^4 x^5 + \ldots]$ 1M

$= [2^9 + 9(2^8)x + 36(2^7)x^2 + 84(2^6)x^3 + 126(2^5)x^4 + 126(2^4)x^5 + \ldots]$

$= [512 + 2304x + 4608x^2 + 5376x^3 + 4032x^4 + 2016x^5 + \ldots]$

一般建議

學生應注意下列各點：

- 應小心運算多項式及代數式
- 審題要小心，留意每個變數的特定條件

一般建議

- 掌握一些基本數學課題，如二項定理、數學歸納法及從基本原理求微分等
- 宜掌握定積分的應用及三維向量的概念

謝謝！

香港考試及評核局
Hong Kong
Examinations and
Assessment Authority